

Да ли слинки пркоси гравитацији?

Дечја играчка слинки у себи крије много занимљиве физике. У овом задатку разматраћемо слинки који је постављен вертикално у пољу силе Земљине теже и чији се горњи крај у почетном тренутку придржава. У једном тренутку његов горњи крај се пусти и слинки након тога слободно пада у пољу силе Земљине теже. Ипак, тај пад је веома необичан. Доњи крај слинкија мирује, тако да делује као да на њега не делује гравитација. Као илустративан пример може послужити демонстративна фотографија са слинкијима које држе млади истраживачи Института за физику у Београду (видети испод¹), као и два видео-снимка снимана брзином од око 170 fps: *one slinky* & *two slinkies*. Алтернативно, можете се и сами поиграти успореним снимањем слинкија, уколико су вам такве могућности доступне.



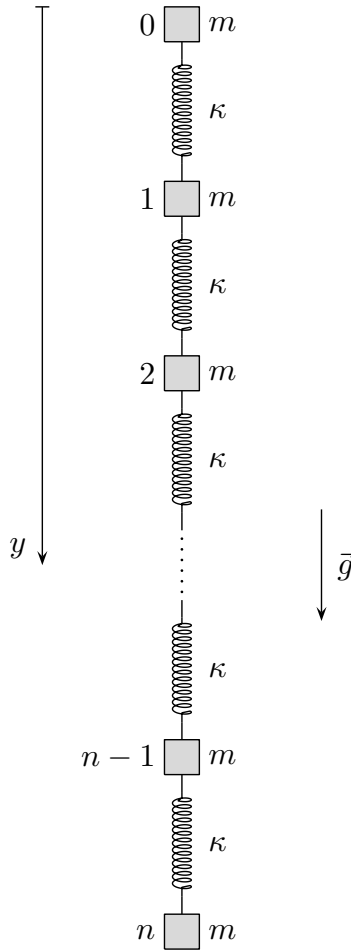
Формулисати математички модел слинкија и у оквиру тог модела одредити зависност положаја сваке тачке на слинкију од времена, полазећи од почетног тренутка кад се слинки пусти да слободно пада до тренутка кад доњи крај слинкија ипак почне да се креће. Јасно описати формулисани модел, смисао параметара тог модела и приказати и образложити сваки корак у решавању тог модела. (⌘⌘)

Решење

Слинки ћемо представити низом од $(n + 1)$ -ог $(n \gg 1)$ идентичног тела масе m која су међусобно повезана идентичним опругама константе еластичности κ , као што је приказано на слици испод. Опруге узимају у обзир еластична својства слинкија, а тела инертна својства слинкија. Док се слинки придржава, систем је у равнотежи и важе следеће једначине:

$$\begin{aligned} 0 &= mg + \kappa(y_1^{(0)} - y_0^{(0)} - \ell_0) - F, \\ 0 &= mg + \kappa(y_2^{(0)} - y_1^{(0)} - \ell_0) - \kappa(y_1^{(0)} - y_0^{(0)} - \ell_0), \\ &\dots \\ 0 &= mg - \kappa(y_n^{(0)} - y_{n-1}^{(0)} - \ell_0). \end{aligned}$$

¹Аутор представљене фотографије у формулацији задатка, као и два линкована снимка је © 2025 Džodan.



У претходним једначинама $y_i^{(0)}$ је y координата i -тог тела, g је интензитет убрзања силе Земљине теже, ℓ_0 је дужина сваке опруге у недеформисаном стању, а F је интензитет силе којом се придржава горњи крај слинкија. Да би систем тада био у равнотежи, сила F мора да буде једнака укупној маси слинкија, односно

$$F = (n + 1)mg.$$

Даље разматрамо шта се дешава кад се слинки пусти да слободно пада. Нека је y_i y -координата i -тог тела дата са

$$y_i = y_i^{(0)} + u_i,$$

где је $y_i^{(0)}$ равнотежни положај тела i , а u_i одговарајући померај. Тада важе једначине

$$\begin{aligned} ma_0 &= (n + 1)mg + \kappa(u_1 - u_0), \\ ma_1 &= \kappa(u_2 - u_1) - \kappa(u_1 - u_0), \\ &\dots \\ ma_{n-1} &= \kappa(u_n - u_{n-1}) - \kappa(u_{n-1} - u_{n-2}), \\ ma_n &= -\kappa(u_n - u_{n-1}), \end{aligned}$$

где је a_i пројекција убрзања i -тог тела на y -осу. Решење ових једначина тражимо у облику

$$u_i(t) = \begin{cases} f(t - \frac{i}{c}) & \text{ако је } t > \frac{i}{c}, \\ 0 & \text{ако је } 0 \leq t \leq \frac{i}{c}, \end{cases}$$

где је c константа која има димензије реципрочног времена и коју ћемо накнадно одредити. Са физичке стране, решење тражимо у облику лонгитудиналног таласа који допире до c тела у јединици времена од горњег краја слинкија надоле. Директном заменом у i -ту једначину, видимо да решење облика

$$f(t) = \alpha t$$

задовољава ту једначину, где је α константа коју ћемо накнадно одредити.

Да бисмо одредили константе α и c , искористићемо једначину кретања нултог тела и једначину кретања центра масе. Из једначине кретања нултог тела налазимо

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{(n+1)mg}{\kappa}.$$

Брзина кретања центра масе у тренутку t је са једне стране

$$v_{\text{cm}} = gt,$$

а са друге стране је повезана са брзинама тела

$$v_{\text{cm}} = \frac{v_0 + v_1 + \dots + v_n}{n+1}.$$

Како су у тренутку t брзине тела са редним бројевима од 0 до $i = ct$ једнаке α , а брзине осталих тела једнаке нули, следи

$$v_{\text{cm}} = \frac{\alpha ct}{n+1},$$

одакле је

$$g = \frac{\alpha c}{n+1}.$$

Тако налазимо и изразе за константе c и α :

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

$$\alpha = (n+1)g\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \approx ng\sqrt{\frac{\kappa}{m}}.$$

Уколико дефинишемо $\xi \equiv i/n$, где $0 \leq \xi \leq 1$ одређује релативни положај неке тачке на слинкију и дефинишемо константу

$$\tau = n\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$$

која има димензије времена, добијамо коначни израз

$$u_{\xi}(t) = \begin{cases} g\tau(t - \xi\tau) & \text{ако је } t > \xi\tau, \\ 0 & \text{ако је } 0 \leq t \leq \xi\tau. \end{cases}$$

Из овог решења видимо да се доњи крај слинкија ($\xi = 1$) не креће до тренутка $t = \tau$. Приметимо и да се време τ може изразити као $\tau = \sqrt{M/K}$, где је $M = (n+1)m \approx nm$ укупна маса слинкија, а $K = \kappa/n$ коефицијент еластичности слинкија.